373 הסתברות מתמטית שעור 6 - מרטינגלים –,משפטי עצירה חלק ב, רכוז מידה, אי שיוויונות והתכנסות

*----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------*

משפטי עצירה חלק ב – הרחבות וסאב מרטינגלים:

בשיעור שעבר הראינו את משפט העצירה של DOOB עבור מרטינגלים.

נראה כעת גרסה מעט יותר כללית של משפט זה (נוכיח רק את חלקה כי ההוכחות דומות מאוד למה שכבר עשינו)

**משפט**: יהא סופר-מרטינגל ויהיו זמני עצירה המקיים כ.ת.

אם מתקיים אחד (או יותר) מהתנאים הבאים אז (ובעצם )

1. אם T זמן עצירה חסום.
2. אם T סופי כ.ת. ו- המרטינגל חסום.

ב\*. אם T סופי כ.ת. וקיים משתנה מקרי אינטגרבילי Y כך ש- לכל n. כ.ת.

ג. אם ול-X יש תוספות חסומות

ד. אם ו – T<

**הערות:** 1. סעיפים א,ב,ג נותנים את המשפט שהוכחנו שעור שעבר ע"יי צמצום למקרה , ומכך שמרטינגל הוא גם סאב-מרטינגל וגם סופר-מרטינגל.

2. סעיף ב\* הוא הרחבה פשוטה של ב. ההוכחה עדיין תופסת (משפט ההתכנסות המונוטונית בו השתמשנו עדיין תופסת)

3. סעיף ד חדש – אומר שמספיקה חסימות מכוון אחד כדי לקבל ש – . זה לא נכון שאם -מרטינגל אי-שלילי ו-T סופי אז . למשל - הילוך מקרי על השלמים שמתחיל ב 1 ועוצר כשמגיעים ל 0.

**נוכיח את ב\* ו-ד,** השאר דומה.

**הוכחת סעיף ב\*:** מכוון ש- לכל n מתקיים

*. כעת מכוון ש*

*,*

*התנאי גורר ולכן ממשפט ההתכנסות הנשלטת*

*, והמשפט נובע מ (\*).*

**הוכחת סעיף ד:**

כאשר אי שוויון השמאלי הוא **מהלמה של פאטו** ואי השוויון הימני הוא מסעיף א.

*דוגמה: הופעת תבנית ברצף של אותיות מקריות:*

*נניח שמגרילים אותיות מאיזשהוא א"ב A, כאשר לכל אות יש הסתברות להופיע בכל שלב.*

*נסמן את רצף האותיות המוגרל (באופן ב"ת)*

*נניח שנתונה מילה , ונסמן ב - את הזמן בו מתחיל המופע הראשון שלה.*

*כמה זמן בממוצע צריך לחכות עד למופע הראשון? מהי ?*

*כדי לפתור זאת נתאר את ההתנהגות של מהמר, , שמגיע בשלב ה i ומתחיל להמר על האותיות שמוגרלות, בניסיון להרוויח אם אכן המילה מתחילה בזמן ה i.*

*בתחילה הוא מהמר על האות הראשונה שקל 1. אחרי ההימור יהא לו*

*כדי שזה יצא הימור מאוזן, נקבע*

*אם הוא הספיד את (כל) כספו – זהו. אם לא, הוא מהמר את הכסף שיש לו על האות הבאה. אם יפסיד – הכסף שלו נהיה 0, אם מנצח – הפעם יהיה לו*

*כך נמשיך שכל פעם מכפילים את הכסף פי אחד חלקי הסיכוי של האות הבאה אם היא יוצאת נכונה,*

*ונאפס את הכסף אם לא. התהליך נעצר ברגע שנגמר מופע מלא של המילה.*

*נסמן ב את הכסף של המהר ה i.* ***מכוון שההימורים מאוזנים – זהו מרטינגל*** *(לכל i)*

*שימו לב שאם המהמר מצליח לצלוח את על L השלבים, כלומר אם , מצאנו מופע של המילה, ושכל מהמר שהגיע לפני כן הספיד את כל כספו.*

*כעת נגדיר מרטינגל חדש: סך כל הרווחים עד זמן t של כל המהמרים שהגיעו עד כה למשחק.*

*ה t- מגיע מהשקל שהשקיע כל מהמר עד זמן t. הוא מרטינגל מכוון שהוא סכום של מרטינגלים (הרווח של כל מהמר עד זמן t)*

*מכוון ש- , וזהו לא מרטינגל חסום , אבל הוא חסום על ידי ממ אינטגרבילי ולחלופין הוא בעל תוספות חסומות (למה?), לכן* ***אפשר להשתמש ב OST****.E[*

*לכן כאשר*

*למשל, אם נקח הטלות מטבע הוגן, ונחכה להופעה של הרצף 101, אז*

*ו-. לעומת זאת ו-*

ריכוז מידה:

אי-שוויון אזומה הופדינג: (אי-שוויון הופדינג לסדרת מרטינגל)

אם מרטינגל המקיים (בהסתברות 1) אז לכל מתקיים

הוכחה: שלב 1 – למה: אם Z מ"מ שמקיים אז לכל

למה (גרסה מותנית): אם אז לכל

*הוכחה:מקמירות של הפונקציה נקבל שכל ולכל*

*ולכן*

*שלב 2: נסמן . על פי הלמה (אחרי נירמול)*

כעת

כעת נקח תוחלת של שני הצדדים ונשתמש באינדוקציה ( או רקורסיה למי שמעדיף) כדי לקבל

*[*

*כדי לסיים את הוכחת המשפט ניקח*

*אי השוויון המקסימלי של DOOB*

***משפט****: יהא סאב-מרטינגל אי-שלילי ) )*

*נסמן . אז לכל*

***הוכחה****: רעיון – נעצור את הסדרה ברגע שנעבור את .*

*נגדיר . אז זמן עצירה חסום, ולכן מה OST*

***דוגמה****: יהיו משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות עם התפלגות*

*נגדיר*

*א. מצאו את ערך p עבורו זו סדרת מרטינגל*

*ב. הוכיחו ש-*

*פתרון: א.*

*לכן תנאי הכרחי ומספיק כדי שזו תהיה סדרת מרטינגל הוא ש- לכל n.*

*(החישוב הזה נכון גם לממ לא שווי התפלגות ואפילו לא חיוביים, אם כי במקרה שהמשתנים יכולים לקבל ערך 0 זה תנאי מספיק אך לא הכרחי. כן השתמשנו באי-תלות)*

*חישוב פשוט עכשיו ייתן ולכן .*

*סעיף ב: על פח אי-השוויון המקסימלי כאשר השוויון השני נובע מכך שזהו מרטינגל. מכוון שזה תופס לכל n נקבל (מרציפות ההסתברות)*

**דוגמה**:מהמר נכנס לקזינו ומשחק במשחק הבא: בכל סיבוב הוא בוחר

ואז הוא משלם p ובסיכוי p הוא זוכה בשקל. הערך של p יכול להשתנות בין סיבוב לסיבוב.

הראו שהסיכוי שהרווח הכולל של המהמר באחד מ n- הסיבובים הראשונים הוא יותר מh-

חסום על ידי

פתרון: כאן אי השוויון המקסימלי לא יתן לנו פתרון (לפחות לא ישירות) אבל אפשר להשתמש באזומה-הופדינג על המרטינגל העצור:

נגדיר להיות הרווח מהמשחק ה k, את להיות הרווח הכולל עד זמן n.

קל לבדוק ש- ללא תלות באסטרטגיית בחירת ה p של השחקן.

לכן מרטינגל. נגדיר , ונסתכל על המרטינגל העצור

זהו מרטינגל עם תוספות חסומות על ידי 1. לכן מאזומה-הופדינג

**התכנסות של מרטינגלים**

**"**תן **למרטינגל חצי הזדמנות והוא ישר יתכנס" (פולקלור, וולש)**

אנחנו נראה מספר משפטי התכנסות של מרטינגלים, שיראו שתחת תנאים שונים (חסימות מצד אחד או שניים, סאב ו סופר מרטינגלים..) הסדרה מתכנסת במובנים שונים (כ.ת., ב או ב (.

נתחיל מהמקרה הקל:

**משפט:** יהא מרטינגל חסום ( (.

אז קיים משתנה מקרי Y כך ש -

כדי להוכיח את המשפט, כמו גם משפטי התכנסות נוספים, נעזר במושג של "חצייה כלפי מעלה – upcrossing ". upcrossing של הקטע [a,b] הוא מקטע זמנים בו התחלנו מתחת ל a וסיימנו מעל b.

כדי להגדיר זאת וכדי לספור אותם נגדיר שתי סדרות של זמני עצירה:

נגדיר ואז לכל נגדיר

תחת המוסכמה הרגילה ש- .

נסמן ב- את מספר ה"חציות-כלפי-מעלה" של הקטע [a,b] עד זמן על ידי התהליך .

סדרה עולה, ולכן מתכנסת במוסן המוכלל. נסמן את מספר החציות הכולל

הרעיון מאחורי הרבה ממשפטי ההתכנסות מרוכז בלמה הבאה:

**למה**: אם ומתקיים ש- וגם P( לכל a<b, אז קיים משתנה מקרי Y כך ש- .

**הוכחה**: הלמה תנבע מהטענה הבאה עבור סדרות מספרים:

טענה: סדרת מספרים מתכנסת במובן המוכלל אם ורק אם לכל

הוכחת הטענה: אם לא מתכנסת במובן במוכלל אז יש לה שתי תתי סדרות שמתכנסות לגבולות מוכללים שונים. בין שני גבולות אלו יש שני מספרים רציונלים. הסדרה חוצה ביניהם אינסוף פעמים.

**הוכחת הלמה:** הלמה נובעת מהטענה על סדרות ומכך ש - .

כעת נוכל לגשת חזרה למשפטי ההתכנסות.

המשפט ינבע מיידית מהמשפט הבא:

**משפט:** יהא על-מרטינגל אי-שלילי אז קיים משתנה מקרי Y כך ש -

הוכחה: יהא b כלשהוא. נסמן . אז ממשפט העצירה

bP( ולכן ומכאן שגם . מכאן (ומרציפות ההסתברות..) נקבל ש- .

חשוב דומה מראה שלכל a<b

מכאן נסיק ש- בהסתברות 1 (והוא אפילו נשלט על ידי משתנה גיאומטרי)

כעת מהלמה נקבל את הדרוש.

**טענה**: אם על-מרטינגל אז לכל a<b ולכל n מתקיים

(כאשר )

**הוכחה**. נסמן

מהגדרות הזמנים לכל k מתקיים

כעת נסכם עד זמן n:

נשים לב ש- זמני עצירה חסומים, ולכן ניתן להשתמש ב OST.

נקח תוחלות של שני הצדדים ונקבל:

***משפט:*** אם על-מרטינגל שחסום ב (כלומר אז הוא מתכנס כ.ת. וב-